コンプトン効果の別解法

## １．エネルギーの概念について

特殊相対性理論でのコンプトン効果の説明は光子と電子の衝突として扱い、完全弾性球の衝突と同じ計算手法のエネルギー保存則と運動量保存則にローレンツ変換を加えて説明している。これらの事情からローレンツ変換を用いずに説明するとすればエネルギー保存則と運動量保存則での計算手法も変えなければ解決できないと思われる。この類推で弾性球の衝突の力学的解法も見直しの必要があると思われる。古典物理学において、質量 $m$、速度 $v$ を持つ物体は 運動エネルギーとして（$mv^2/2$） が定義される。この値は他の運動速度系からみれば速度が異なりよって異なるエネルギー値を持つこととなる。純粋にエネルギー保存を考える場合には矛盾に思われる。しかしながらエネルギー保存則の取り扱いについては、速度系の違いによってエネルギー値は異なった値となるが、任意の速度系で計算しても矛盾の無い正しい答えが出てくることは知られている。従って運動エネルギーは概念と言うより計算上の便法と考えたほうが良いのではないか。例えば完全弾性球の衝突計算ではエネルギー保存と運動量保存の法則から計算し答えが出されるが、速度について２次の式となり２つの解が出てくる。そして一方の解を実状に合わせて排除しもう一方を解としている。論理の完全性から考えればすべて<u>速度について１次の式で計算し答えを見つける</u>方法があるのではないかと思われる。

図 1. に示す如く、２つの完全弾性球が一直線上で衝突し然る後、同じ直線上をそれぞれ反対方向に飛び去る場合を考えて推論検討してみる。衝突の瞬間にはそれぞれの弾性球は互いに重心座標系の速度になるまで反対方向の力積がはたらく。ここで重心座標系の速度を $v_3$ とすれば

$$m_1v_1 - m_1v_3 = \int Fdt \quad 、\quad m_2v_2 - m_2v_3 = \int F'dt$$

ここで　$F = -F'$　（作用・反作用の法則より）

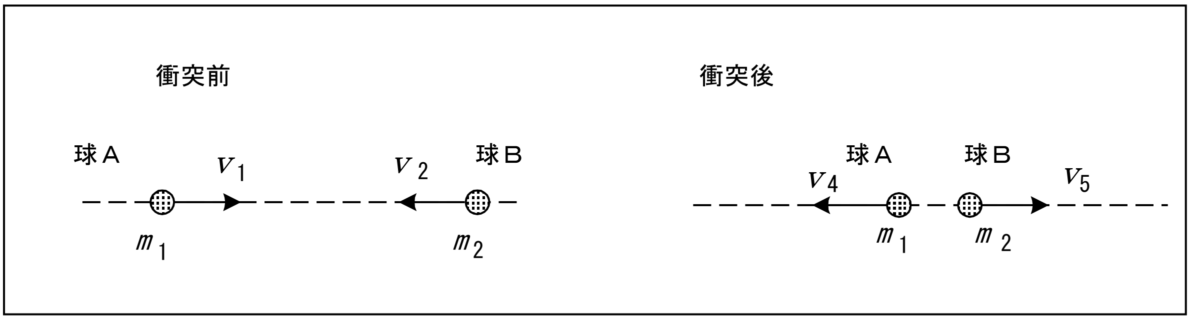


**図 1.** 完全弾性球の衝突を速度について一次の式で解く 、２つの弾性球 A、B の質量をそれぞれ $m_1$、$m_2$ 衝突前の速度を $v_1$、$v_2$ とする。一直線上で衝突し然る後、同じ直線上をそれぞれ反対方向に飛び去る速度をそれぞれ $v_4$, とする。

$$\therefore m_1(v_1 - v_3) = m_2(v_3 - v_2) \quad \cdots \quad (1)$$
$$\therefore m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_3$$
$$\therefore v_3 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \cdots \quad (2)$$

そして完全弾性球なので始めに働いた力積は失われず各々の弾性球に再び作用し各々 $v_4$、$v_5$の速度で離れるとすると、球 A ついて衝突の前後の力積は等しく

$$m_1(v_1 - v_3) = m_1(v_3 - v_4)$$

故に

$$v_4 = 2v_3 - v_1 \quad \cdots \quad (３)$$

（３）式に（２）式 を代入して

$$v_4 = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \quad \cdots \quad (４)$$

同様に 球 B についてては

$$m_2(v_3 - v_2) = m_2(v_5 - v_2) \quad \cdots \quad (５)$$

故に

$$v_5 = 2v_3 - v_2$$

この式に（２）式を代入して

$$v_5 = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \quad \cdots \quad (６)$$

(4)、(6) 式の解の意味は、それぞれの<u>反跳速度は重心系の速度の２倍から各々の入射速度を引いた値となる</u>ことを示している。

また式（４）式を変形して

$$v_4 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -\left\{ v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right\}$$

この式の意味は重心座標系からみれば $v_1$と $v_4$は大きさが同じで方向が反対になっていることになる。この解法には従来のエネルギー保存則も運動量保存則も出てこない。しいて言えば作用・反作用の法則と力積の保存である。すなわち速度について１次の式で解けたことになる。

なお (4) 式と(6)式をそれぞれ変形すれば

$$v_4 = \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{(m_2 - m_1)\cdot v_1}{m_1 + m_2} \quad , \quad v_5 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} - \frac{(m_1 - m_2)\cdot v_2}{m_{11} + m_2}$$

となり通常の解法と同じ結果を得ることになる。

## ２． コンプトン効果の説明

電磁波が光子として運動量を持っていることから電子との相互作用としてのコンプトン

効果を上記の弾性球の衝突の手法で説明を試みる。図 2. の如く入射波の振動数を$\nu$、またこの重心座標系の速度を$v$、重心系からみた入射波の振動数 $\nu'$、プランク定数を$h$、電子質量を$m$、光速度を$c$とする。この場合電子と光の相互作用の重心座標系の考え方が問題となる。類推として重心系からみた静止電子の運動量と重心系からみた電磁波の運動量が方向が反対で大きさが同じになるような速度系と考えればよい。よって

$$mv = \frac{h\nu'}{c} \quad \cdots \quad (7)$$

が成立する。

この場合重心系からみた入射波の振動数はドップラー効果として扱うのが妥当と思われ

$$\nu' = \nu(1-\frac{v}{c}) \quad \cdots \quad (8)$$

が成立する。（8）式を（7）式に代入して重心座標系の速度を求めれば

$$mv = \frac{h\nu}{c}(1-\frac{v}{c}) \quad \cdots \quad (9)$$

$$\therefore mv + \frac{h\nu}{c^2}v = \frac{h\nu}{c}$$

$$\therefore v = \frac{h\nu}{mc}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}} \quad \cdots \quad (10)$$

重心系の速度を示す（10）式を（8）式に代入すれば重心系からみた入射波の振動数が出て来る。

$$\nu' = \nu(1-\frac{v}{c}) = \nu(1-\frac{h\nu}{mc^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}}) = \frac{\nu}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}} \quad \cdots \quad (11)$$

コンプトン効果としては、この重心速度系から$\nu'$の振動数の反射波が出る事になる訳で、従って重心速度の光源から出る光を$\theta$方向から見るドップラー効果として観測されることになる。

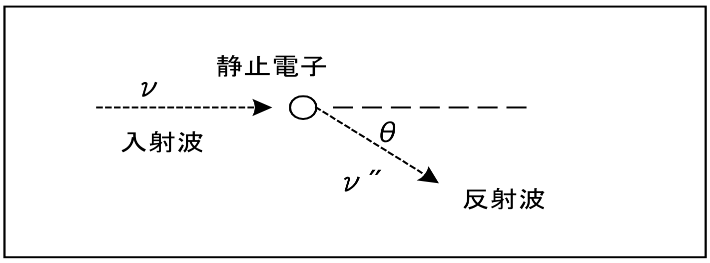


**図 2.** 静止電子と電磁波の相互作用、入射波の振動数を$\nu$、プランク定数を$h$、電子質量を$m$、光速度を$c$、とする。

この振動数を$\nu''$とすればドップラー効果として

$$\nu''=\nu'\frac{c}{c-v\cos\theta}=\frac{\nu'}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \quad \cdots$$ （12）が成立する

（12）式に（10）、（11）式を代入すれば

$$\nu''=\frac{\nu}{1+\frac{h\nu}{mc^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{\frac{h\nu}{mc^2}}{1+\frac{h\nu}{mc^2}}\cos\theta}=\frac{\nu}{1+\frac{h\nu}{mc^2}-\frac{h\nu}{mc^2}\cos\theta} \quad \cdots \quad (13)$$

(13)式の左辺の分母を払うと

$$\therefore \nu''+\frac{h\nu}{mc^2}(1-\cos\theta)\nu''=\nu$$

$$\therefore \nu-\nu''=\frac{h\nu}{mc^2}\nu''(1-\cos\theta)$$

両辺を$\nu\nu''$で割って

$$\frac{1}{\nu''}-\frac{1}{\nu}=\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{c}{\nu''}-\frac{c}{\nu}=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \quad \cdots \quad (14)$$

ここで $\frac{c}{\nu}=\lambda,\frac{c}{\nu''}=\lambda''$ とすれば（14）式は

$$\lambda''-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

となりコンプトン効果の式に完全に一致する。かくしてコンプトン効果をローレンツ変換に関係なく説明することが出来た。ここでの推論では電磁波を光子として扱って運動量を与え、静止電子との衝突と考えて計算を進めた。この説明でもエネルギー保存則を使用せずに解決している。

## ３．コンプトン効果の反跳電子の速度とエネルギーについて

コンプトン効果を非相対論的に説明した中で、振動数νの電磁波を量子化し(ｈν/ｃ)の運動量を持つとして静止電子との重心座標系の速度を求めることにより説明を成立させた。反射波の振動数が減少しまた方向も変化しているので電磁波の運動量の変化分は運動量保存則から全て反跳電子が受け取ったことになる。従ってコンプトン効果の結果から逆に電子の波動媒体空間に対する速度と運動量の関係式が導き出される。

コンプトン効果で、静止電子と入射電磁波の重心座標系の速度の式は２節（10）式より

$$v=\frac{1}{m}\cdot\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}}$$

この式の意味は重心座標系の速度は入射電磁波の運動量（$h\nu/c$）を電子質量 $m$ で割ったものに比 $1/(1+h\nu/mc^2)$ を掛けたものと言う事になる。従ってこの比の分母の（$h\nu/mc^2$）も比を表さねばならないことになる。また比（$h\nu/mc^2$）の分子（$h\nu$）はエネルギーを示しているので分母の($mc^2$) もエネルギーを表すことが要請される。式（$h\nu/mc^2$）を($h\nu/c$)/$mc$ と変形すればこの式の分子($h\nu/c$)は運動量を表しているので分母の（$mc$）も運動量を示すことになる。この場合運動量は運動量の差を扱っているので、力積を意味していると考えたほうが適切と思われる。従って電磁波の運動量( $h\nu/c$)と質量 $m$ 速度 $v$ の粒子の運動量（$mv$）とを同等に扱った帰結として静止電子が力積（$mc$）またはエネルギー( $mc^2$ ) をもつことが要請されることになり $E=mc^2$ の質量とエネルギーの等価性を示している。

**４.コンプトン効果で反跳電子に渡される運動量**

静止電子に渡される入射波と反射波の運動量の変化分を計算する上で推論を簡単にするために反射波の出た方向を入射波の正反対方向即ちコンプトン効果で反射波の出る方向を（$\theta=\pi$）の場合を検討することにする。入射波の振動数を $\nu$、反射波の振動数を $\nu''$、静止電子と入射電磁波の重心座標系の速度を $v_c$ 、反跳電子の速度を $v$ とする。

$$v_c=\frac{h\nu}{mc}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}} \qquad \cdots \quad (15)$$

、

$$\nu''=\frac{\nu}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}(1-\cos\pi)}=\frac{\nu}{1+2\dfrac{h\nu}{mc^2}} \qquad \cdots \quad (16)$$

作用電磁波の運動量の変化分は入射波と反射波の方向は 180° 異なるので両者の和で表され

$$\frac{h\nu}{c}+\frac{h\nu''}{c}=\frac{h\nu}{c}+\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}}=\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{2(1+\dfrac{h\nu}{mc^2})}{1+2\dfrac{h\nu}{mc^2}} \qquad \cdots$$

（17）が成立する。

一方反跳電子の受け取る運動量は、1 節の弾性球の衝突のから類推すれば静止状態から重心座標系に移るために蓄えられた力積と同じ量の力積が作用し重心座標系から反跳速度になると考えられ、1.節の（６）式で $v_2=0$ の場合の $v_5$ の値となり結果として重心座標系の２倍の速度になると考えられる。よって（15）式より

$$mv = 2mv_c = \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{2}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}} \quad \cdots \quad (18)$$ の値になる。

（17）式と（18）は一致せず運動量保存則が成立しない事になる。(18）式の意味は電子の得る運動量を単に重心系からみた入射波の運動量の２倍としていて、この為に不一致となっている。

**5. 電子の概念と運動量の概念を考えなおす。**

この矛盾を解決するには電子の運動量を従来の質量と速度の積で考えるのではなく、電磁波と同様に、電子の運動量も振動数に結びつけ波動的に扱えると思われる。では何故波動であるものが光速度で進まずに静止したり、種々の速度をとるのか。波動がなにかに拘束されているとすれば解決出来ると思われる。

図 3 の如く互いに反対方向に進行する電磁波が何らかの原因で互いに結び付き重心を中心にして回転進行するようになったものを電子と考える。即ち２つの波動の重心が静止したりまた種々の速度をとったりすると考えれば波動でありながら光速度以外の速度をとることが出来ることになる。この場合２つの波動の重心の速度は２節のコンプトン効果の重心速度のようにドップラー効果的に決まるとして、重心速度を $v$、$a$、$b$ をそれぞれ電磁波の力積（運動量の絶対値）とすれば

$$a(1 - \frac{v}{c}) = b(1 + \frac{v}{c}) \quad \cdots \quad (19)$$ （ただし $a > b$）

と表現出来る。従ってこの重心速度が電子の速度として観測されることになる。(19)式は電子速度を表すので波動速度式と呼ぶことにする。

静止電子の場合は $v = 0$ の場合で (19) 式では $a = b$ となり、静止電子の全力積は（$mc$）となるので $a + b = mc$ とすれば $a = b = mc/2$ となる。

この手法でコンプトン効果の重心系の速度 $v_c$ を求めてみる。例えば（19）式の左辺に入射波が作用して一緒に動くとすれば重心系の速度として

$$(\frac{1}{2}mc + \frac{h\nu}{c})(1 - \frac{v_c}{c}) = \frac{1}{2}mc(1 + \frac{v_c}{c}) \quad \cdots \quad (20)$$ が成立する。

$$\therefore \frac{1}{2}mc + \frac{h\nu}{c} - (\frac{1}{2}mc + \frac{h\nu}{c})\frac{v_c}{c} = \frac{1}{2}mc + \frac{1}{2}mc \cdot \frac{v_c}{c}$$

$$\therefore \frac{h\nu}{c} = (mc + \frac{h\nu}{c})\frac{v_c}{c}$$

$$\therefore mv_c = \frac{h\nu}{c}(1 - \frac{v_c}{c}) \quad \cdots \quad (21)$$

この式は 3.2 節の（８）式と一致し重心系の速度を示す式となっている。

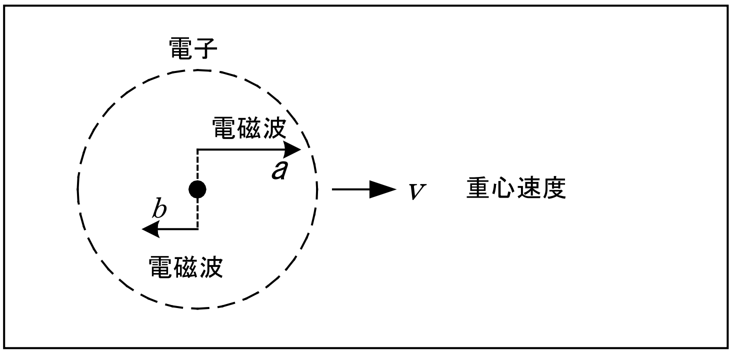


**図 3. 電子の運動量の概念の考え直し**、互いに反対方向に進行する電磁波が結び付き重心を中心にして回転進行するようになったものを電子と考える。重心速度を $v$ , $a$ , $b$ をそれぞれの電磁波の力積（運動量の絶対値）とする。

従って（21）式を変形して逆に（20）式が導かれることを示している。即ち重心系の速度を示す（21）式から（20）式が導かれ（20）式は電子の運動量と入射電磁波の運動量が融合した表現になっていて電子自体を速度について波動的に扱えることを示していることになる。同じ考えで反射波を出した後の電子の速度を示す式は

$$(\frac{1}{2}mc+\frac{h\nu}{c})(1-\frac{v}{c})=(\frac{1}{2}mc-\frac{h\nu''}{c})(1+\frac{v}{c}) \quad ・・・(22)$$

と表現されると考えられる。運動量の保存について上式は $\frac{h\nu}{c}$ を得て $\frac{h\nu''}{c}$ を失っている事を示し保存則は明示せずとも成立していることになる。

**5. 新しい概念でコンプトン効果の結果から電子速度と力積の関係を求める。**

図 4. に示すコンプトン効果で、静止電子の質量を $m$ 、光速度を $c$ 、またプランク定数を $h$ 、また　$a$ 、$b$ を電子を構成する反対方向に進行する電磁波の力積とすると反跳電子の速度を示す式は

$$a(1-\frac{v}{c})=b(1+\frac{v}{c}) \quad ・・・ \quad (22')$$

と表現され、また全力積は保存されて

$$a+b=mc+\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c} \quad ・・・ \quad (23)$$ と表される。

また電子の得た力積を $U$ とすると

$$U=\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c} \quad ・・・ \quad (24)$$ で表される。

（24）式を（23）式に代入すれば

$$a+b=U+mc \quad ・・・ \quad (25)$$

$(a-b)$ は電子の得た運動量となるので、運動量の保存より

$$(a-b)\cos\phi = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu''}{c}\cos\theta \quad \cdots \quad (26)$$

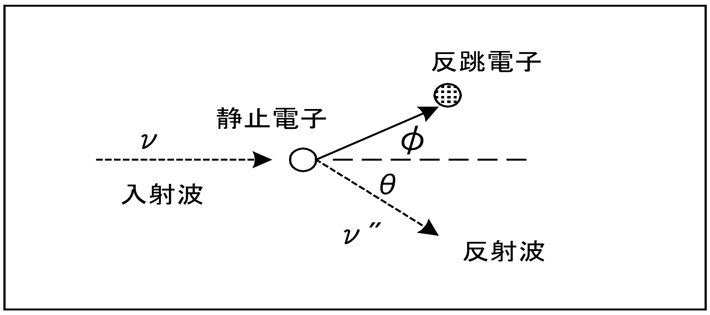


**図 4** 、新しい概念の電子速度と運動量の関係 、反射波は $\theta$ 方向に出て反跳電子は $\phi$ 方向に進む、入射波の振動数を $\nu$ 、反射波の振動数 $\nu''$ とする

$$(a-b)\sin\phi = \frac{h\nu''}{c}\sin\theta \qquad \cdots \quad (27)$$

そしてコンプトン効果から

$$\frac{h\nu''}{c} = \frac{h\nu}{c}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{h\nu}{mc^2}(1-\cos\theta)} \qquad \cdots \qquad (28)$$

$(26)^2+(27)^2$ より

$$(a-b)^2\cos^2\phi + (a-b)^2\sin^2\phi = (\frac{h\nu}{c})^2 - 2\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{h\nu''}{c}\cos\theta + (\frac{h\nu''}{c})^2$$

$$\therefore (a-b)^2 = (\frac{h\nu}{c})^2 - 2\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{h\nu''}{c}\cos\theta + (\frac{h\nu''}{c})^2 \qquad \cdots \quad (29)$$

ここで（22）式より

$$(a-b) = \frac{v}{c}(a+b)$$

この式に（25）を代入して

$$\therefore (a-b) = \frac{v}{c}(U+mc) \qquad \cdots \qquad (30)$$

（30）式を（29 ）式に代入し

$$\therefore (\frac{v}{c})^2(U+mc)^2 = (\frac{h\nu}{c})^2 - 2\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{h\nu''}{c}\cos\theta + (\frac{h\nu''}{c})^2 \qquad \cdots \qquad (31)$$

次に（28）式を変形して

$$\frac{h\nu''}{c}+\frac{h\nu}{mc^2}\cdot\frac{h\nu''}{c}(1-\cos\theta)=\frac{h\nu}{c}$$

$$\frac{h\nu}{mc^2}\frac{h\nu''}{c}-\frac{h\nu}{mc^2}\frac{h\nu''}{c}\cos\theta=\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c}$$

両辺に $m$c をかけて

$$\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu''}{c}-\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu''}{c}\cos\theta=mc(\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c})$$

$$\therefore\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu''}{c}\cos\theta=\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu''}{c}-mc(\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c})\quad\cdots\quad(32)$$

（32）を（31）に代入して整理すると

$$(\frac{v}{c})^2(U+mc)^2=(\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c})^2+2mc(\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c})$$

$$=U^2+2mcU$$

$$=(U+mc)^2-(mc)^2\quad\cdots\quad(33)$$

$$\therefore(U+mc)^2=\frac{(mc)^2}{1-(v/c)^2}\qquad\cdots\qquad(34)$$

$$\therefore U+mc=\pm\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\qquad\cdots\qquad(35)$$

上式の両辺に光速度 c を掛けると

$$\therefore Uc+mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

（24）式、$U=\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu''}{c}$ を上式に代入すると

$$\therefore(\frac{h\nu}{\mathrm{c}}-\frac{h\nu''}{c})c+mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\therefore h\nu-h\nu''+mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\qquad\cdot\cdot\cdot(35')$$

上式は質量の増加を示している。

コンプトン効果の結果から電子の速度と力積の関係式を導くことが出来、また（35'）は特殊相対性理論論の質量の増加式に一致する。ただしこの式では速度は絶対空間に対する速度であり絶対自由空間に対して電子が速度をもつ場合に電子が電磁波から受け取った力積に応じて速度が決定されることを示している。このことは絶対空間に対して速度を減ずるときに電子はエネルギー積を電磁波の形で放出するとして矛盾がない。

これまでの推論で電子を反対方向に進行する二つの電磁波の結合したものと仮定して論理を組み立てているが、それぞれの電磁波の持つ力積の大きさには一定の関係式が成立す

ると考えられる。次にこの関係式を求めることにする。それぞれ反対方向に進む電磁波の力積の大きさを$a$と$b$とする、まず（25）式を（34）式に代入して

$$(U+mc)^2=(a+b)^2=\frac{(mc)^2}{1-(v/c)^2} \quad \cdots \quad (36)$$

（22）式より

$$\frac{v}{c}=\frac{a-b}{a+b} \quad \cdots \quad (37)$$

（36）式に（37）式を代入して

$$(a+b)^2=\frac{(mc)^2}{1-(\frac{a-b}{a+b})^2}$$

$$\therefore (a+b)^2-(a-b)^2=(mc)^2 \quad \cdots \quad (38)$$

$$\therefore 4ab=(mc)^2$$

$$\therefore ab=(\frac{1}{2}mc)^2 \quad \cdots \quad (39)$$

(39) 式の左辺の積 ( $ab$ ) は常に一定となり何か物理量の保存則を示していることになる。この積の保存がどんな物理量に対応しているかここでは結論が出ない。(38) 式にもどれば（38）の意味は全力積（$a+b$）と運動量（$a-b$）と静止状態での力積（$mc$）とがピタゴラスの定理の関係で結ばれていることを示し、非常に簡潔で美しい関係式になっている。

。(35‘）式の左辺は電子の持つ全エネルギーを示しているので絶対自由空間に対して電子が速度をもつ場合は右辺の如く電子の持つ全エネルギーは増大することになる。従って絶対空間に対して速度を減ずる場合はエネルギーを放出することになる。相対的に速度を扱ってはエネルギーの増大基準となるものがなくなり矛盾が起きることになる。

電磁波の場合力積とエネルギーの関係は運動量 (力積) に光速度を掛けたものがエネルギーを表し、電子についても<u>波動的速度式の概念を適用すれば電磁波の場合と同様に力積とエネルギーを扱うことが出来る</u>ことになる。

電磁波については力積 (運動量) もエネルギーも振動数に比例して増大するが電子の場合、反対方向に進行する 2 つの電磁波が結合した形態の為に運動量とエネルギーの関係が電磁波とは異なることになる。

**波動的速度式を検討する。**

電子の自由空間での速度を示す波動的速度式はコンプトン効果の説明の 5 節の（22）式より

$$(\frac{1}{2}mc+\frac{h\nu}{c})(1-\frac{v}{c})=(\frac{1}{2}mc-\frac{h\nu''}{c})(1+\frac{v}{c}) \quad \cdots \quad (40)$$ で表される

この場合の反射波の大きさは同じ5節の（28）式より

$$\frac{h\nu''}{c}=\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{1}{1+\frac{h\nu}{mc^2}(1-\cos\theta)} \qquad \cdots \qquad (41)$$ で示される。

（41）式で $\theta=0$ の場合は $\cos\theta=1$ であるから

$\frac{h\nu''}{c}=\frac{h\nu}{c}$ となり入射波と反射波の振動数は等しくなる。

従って電子に渡される力積は

$\frac{h\nu''}{c}-\frac{h\nu}{c}$ で与えられゼロとなるので（1）式では $\nu=0$ となりコンプトン反応はなかっ

たことと同じになる。

次に（41）式で $\theta=\pi$ の場合作用は最大で $\cos\theta=-1$ であるから反射波の大きさは

$$\frac{h\nu''}{c}=\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{1}{1+2\frac{h\nu}{mc^2}} \qquad \cdots \qquad (42)$$ となる。

（42）式を観察すると $h\nu$（入射波のエネルギー）が $mc^2$（電子の静止エネルギー）と比較して十分に小さいときは反射波は入射波とほぼ同じ大きさの振動となる。

（42）式をさらに変形し

$$\frac{h\nu''}{c}=\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{1}{1+2\frac{h\nu}{mc^2}}=\frac{h}{c}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\nu}+2\frac{h}{mc^2}} \qquad \cdots \qquad (43)$$

ここで入射波の振動数 $\nu$ を無限大にとると（43）式は

$\frac{h\nu''}{c}=\frac{h}{c}\cdot\frac{1}{2\frac{h}{mc^2}}=\frac{1}{2}mc$ となり反射波の最大値は電子の静止力積の半分の大

きさになる

従って電子と電磁波との相互作用では静止力積の半分以上の反射波は出て来ないことになる。

上記下線部の命題に関連してリュードベリ定数と微細構造定数そして静止電子の半分のエネルギーとの興味深い関係を次ぎに示す。リュードベリ定数は始め水素原子のスペクトル系列を表現する際に出て来た波数を示す式の係数として定義された。後にボーアが水素原子模型を提唱した時に

$$R=\frac{2\pi^2me^4}{h^3c} \qquad R\ :\text{リュードベリ定数}$$

と計算されることを示した、この式を微細構造定数（$\alpha = 2\pi e^2 / hc$）を用いて変形すれば

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c} = (\frac{1}{2}mc^2)\cdot(\frac{2\pi e^2}{hc})^2 \cdot \frac{1}{hc} = (\frac{1}{2}mc^2)\cdot\alpha^2\cdot\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{c} \quad \cdots \quad (44)$$

と表される。(44）式の右辺の意味するものは、リュードベリ定数は電子の静止エネルの半分に微細構造定数の２乗を乗じたものを振動数に変換すべくプランク定数で除したものをさらに波数に換算するよう光速度で除した値を示していることになる。このことは原子構造に起因していると考えられるがここでも静止エネルギーの半分の値となっている。

(22）式の波動的速度式にもどって力積またはエネルギーと速度の関係を調べてみる。

$a(1 - v/c) = b(1 + v/c) \quad \cdots$ (45）が成立し

$ab = (mc^2/2)^2 \quad \cdots$ (46)

が保存されている。(力積の場合は $ab = (mc/2)^2$

（$a + b$）

は全力積または全エネルギーを示す。

(45）式の表している意味は反対方向に進む２つの電磁波の結合した重心速度（電子の速度）から見ればそれぞれの電磁波の力積またはエネルギーはドップラー効果的に等しくなる事をしめしている。

光（電磁波）は（$h\nu$）のエネルギーを持ち光の速度で進むが質量は持たないとされている、何故ならば光のエネルギーが変化しても速度は変化しない為である。一方ここで議論の電子像はそれぞれ反対方向に進む電磁波が結合したもので（7）式の条件でそれぞれの反対方向に進む電磁波のエネルギーの大きさが変化しその２つの電磁波の結合の重心の速度が変わり電子の速度として観測され、速度の変化の程度を示す。電子の速度は得た力積またはエネルギーの大きさで決まり、力積またはエネルギーの増減がなければ速度は変化せず、従って慣性の法則を示していることになり、且つ電子が速度を変えるにはそれぞれ反対方向に進む力積あるいはエネルギーの変換が必要でありこのことは慣性抵抗を意味し、従って波動的速度式の概念は質量の起源を示していることになる。